جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الاضافية (مرسوم) ٢٠١٥-٢٠١٦
أسئلة مقرر التحليل التابعي (١)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة : ساعة ونصف
العلامة: (١٠٠) درجة
الاسم :

السؤال الأول (٢٥ درجة):

أ) أثبت أن العلاقة : $\|f\|_C = \int_a^b |f(x)|dx \quad ; \; f \in C[a,b]$

تحقق شروط النظيم ، وهل الفضاء $C[a,b]$ هو تام مع هذا النظيم (بدون اثبات) ؟ وما هو النظيم الذي يمكن أن يكون معه هذا الفضاء باناخياً ولماذا ؟

(ب) - نعلم أن كل فضاء خطي منظم هو فضاء متري ، فبين إن كان العكس صحيحاً بمثال من عندك مع ذكر المسافة المناسبة لذلك بدون حل .

- ماذا نقصد بـ الفضاء المتري الخطي – التابع المحدب، وهل الفضاء $\mathbb{R}$ فصول أم لا ؟ مع ذكر السبب، ومتى يكون الفضاء الخطي التبولوجي منظماً ؟

السؤال الثاني (٢٥ درجة) : ١)- أثبت أن كل فضاء خطي منظم نوني البعد هو فضاء باناخ ، ثم أوضح بمثال إن كان (Q, d) فضاء تام أم لا؟ (حيث d هي المسافة الإقليدية على Q).

٢) - تأكد فيما اذا كان النظيمان الآتيان متكافئان مع التعليل:

$$\|f\|_1 = \max_{0 \le x \le 1} \left| e^{-\alpha x} f(x) \right|$$

$$\|f\|_2 = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)| \qquad ; \; f \in C[0,1] \, , \; \alpha > 0$$

٣)- اذكر شكل النظيم في كل من الفضاءين التاليين : $C^m[a,b]$ و $\ell_p \; (1 \le p \le \infty)$

ثم احسب نظيم التابع $g(x) = arc\tan x$ في الفضاء $BV[0,1]$ فقط .

السؤال الثالث (٩ +٦=١٥ درجة):

أ)- ليكن لدينا : $x_1(t) = t^2 \;,\; x_2(t) = t \;,\; x_3(t) = 1$ حوّل x_1, x_2, x_3 إلى عناصر متعامدة نظامية على $[-1,+1]$ بالنسبة للجداء الداخلي في $L_2(\mathbb{R})$ كيف تكتب هذه العناصر بدلالة القاعدة .

ب)- إذا كان X فضاء جداء داخلي و $A \subset X$ و $B \subset A$ أثبت عندئذٍ أن $A^{\perp} \subset B^{\perp}$.

السؤال الرابع (١٥ درجة): ليكن المؤثر D المعرف بالشكل :

$$D : C[a,b] \to C[a,b]$$
$$f(x) \mapsto Df = f'$$

حيث هنا f' مشتق التابع المستمر $f(x)$ وأن ساحة تعريف D تمثل مجموعة التوابع المستمرة والقابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$. أثبت أن D <u>خطي</u> و<u>غير محدود</u> لكنه مؤثر <u>مغلق</u> .

السؤال الخامس (١٠+١٠ = ٢٠ درجة):

أ)- ليكن E فضاء خطياً منظماً أثبت أن الفضاء المرافق له E^* فضاء **تاماً** .

ب)- إذا كانت $\{A_n\}$ متتالية من المؤثرات تتقارب بضعف من A ، **فبين أن** المتتالية $\{A_n^*\}$ تتقارب بضعف من A^* عندما $n \longrightarrow \infty$. أما إذا كان $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ (تقارب نقطي) فهذا لا يؤدي بالضرورة إلى أن $A_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} A^*$ (تقارب نقطي) . **اذكر مثالا** توضح فيه ذلك .

حمص في ٢١ / ٨ / ٢٠١٦ م.   مع التمنيات بالنجاح والتوفيق   د. سامح العرجة، د. محمد عامر

جواب السؤال الأول (٢٥ درجة) :

أ) - واضح أن $C[a,b]$ فضاء خطي ولنتأكد أن $\|f\|_C=\int_a^b |f(x)|dx \ ; \ f\in C[a,b]$ تحقق شروط النظيم

$$N_1)\ \ \|f\|\geq 0\ ,\ \forall f\in[a,b]$$

$$N_2)\ \ \|f\|=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow f=\theta$$

$$N_3)\ \|\lambda f\|=\int_a^b|\lambda f(x)|dx=|\lambda|\int_a^b|f(x)|dx$$

$$=|\lambda|\,\|f\|\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\ ,\ f\in C[a,b]$$

بما أن : $|f(x)+g(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|$ فيكون:

$$\int_a^b|f(x)+g(x)|dx\leq\int_a^b|f(x)|dx+\int_a^b|g(x)|dx$$

وبالتالي: $\|f(x)+g(x)\|\leq\|f\|+\|g\|$ إذن $C[a,b]$ فضاء خطي منظم وفق النظيم المعطى.

الفضاء $C[a,b]$ غير تام مع النظيم المعطى . و النظيم الذي يمكن أن يكون معه هذا الفضاء باناخياً هو

$$\|f\|_C=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\ ;\ f\in C[a,b]$$

حيث مع هذا النظيم (يحقق شروط النظيم) وهو خطي وتام لأن كل متتالية كوشي في هذا الفضاء تتقارب من تابع في هذا الفضاء مع هذا النظيم ،لذا يمكن القول أن الفضاء $C[a,b]$ هو فضاء باناخ (خطي ومنظم وتام) .

ب) فضاء كل المتتاليات العددية s (الحقيقية أو العقدية) $x=\{x_n\}$ هو فضاء خطي ومتري مع المسافة :

$$d(\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}\ \ ;\ \xi,\eta\in s$$

وهو فضاء غير منظم وذلك لأن الشرط الثالث من شروط النظيم غير محقق وهذا كاف .- بفرض أن E ليكن X فضاءً خطياً مع المسافة اللامتغيرة الانسحاب d عندئذٍ ندعو الفضاء (X,d) فضاءً مترياً خطياً إذا كانت d مع العملية الجمعية وعملية الجداء بعدد مستمرتان في (X,d) .

بفرض E أن مجموعة محدبة من المجموعة X وليكن $f:E\to\mathbb{R}$، نسمي f تابع محدب على E إذا وفقط إذا كان أي عنصرين $x,y\in E$ و $\lambda+\mu=1$ حيث $\lambda\geq0\ ,\ \mu\geq0$ فإن:

$$f(\lambda x+\mu y)\leq\lambda f(x)+\mu f(y)$$

واضح أنّ كل تابع خطي هو تابع محدب .

الفضاء $\mathbb{R}$ فهو فضاء فصول (لأن Q مجموعة كثيفة وقابلة للعد) . ولكنّ المجموعة $\mathbb{Z}$ قابلة للعد ولكنّها ليست كثيفة في $\mathbb{R}$.

يكون الفضاء الخطي الطبولوجي X قابلاً للتنظيم هو أن يوجد فيه جوار محدب ومحدود للصفر .

15

10

جواب السؤال الثاني (٢٥ درجة):

أ)- لتكن $x_1, x_2, ..., x_n$ قاعدة في E ولتكن أي متتالية كوشي $\{x^N\}$ في E، عندئذٍ يكون:

$x^N = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^N x_i \quad ; N = 1,2,3,....$ ومن أجل $i = 1,2,3,......n$ يكون لدينا :

$$\left|\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^{(M)}\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^{(M)}\right| = \left\|x^N - x^M\right\|_0 \xrightarrow[M \to \infty]{N \to \infty} 0$$

وهذا يعني أن المتتالية العددية $\left\{\lambda_i^{(N)}\right\}$ هي متتالية كوشي (أساسية) من أجل $i = 1,2,3,......,n$ فهي متقاربة (التقارب هنا تقارب بالإحداثي) نفرض أن $\lambda_i^{(N)} \to \lambda_i^0$ (حيث $i = 1,2,3,......,n$) وأن $x^0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^0 x_i$ فنجد أن: $\left\|x^N - x^0\right\|_0 = \sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^0\right| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$ إذن E فضاء فضاء باناخ .

- (Q, d) فضاء ليس تاماً وذلك لأنه يمكننا ايجاد متتالية لكوشي فيه ولكن هذه المتتالية ليست متتالية متقاربة الى عنصر من هذا الفضاء مثل $n \ge 1 \; ; \; x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ هي متتالية كوشي ولكنها تتقارب من العدد $e \notin Q$ (ليس تاماً) مع أن $x_n \in Q$

ب)- نقول عن نظيمين $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ أنهما متكافئان في الفضاء الخطي المنظم E إذا وجد عددان موجبان A و B بحيث يكون: $\|x\|_1 \le A\|x\|_2 \;\; \& \;\; \|x\|_2 \le B\|x\|_1 \;\; ; \;\; \forall x \in E$

الفضاء $C[0,1]$ كما نعلم خطي ومنظم . لدينا

$$\|f\|_1 = \max_{0 \le x \le 1}\left|e^{-\alpha x} f(x)\right| \le \underbrace{\max_{0 \le x \le 1}\left|e^{-\alpha x}\right|}_{A} \max\left|f(x)\right| \; ; f \in C[0,1] \Rightarrow$$

$$\|f\|_1 \le A\,\|f\|_2 \qquad (1) \; ; A = 1$$

$$\|f\|_2 = \max|f(x)| = \max|f(x)| = \max_{0 \le x \le 1}\left|e^{-\alpha x} e^{\alpha x} f(x)\right| \le \max_{0 \le x \le 1}\left|e^{-\alpha x}\right| . \max_{0 \le x \le 1}\left|e^{\alpha x} f(x)\right| \le$$

$$e^{\alpha} . \|f\|_1 \le B\|f\|_1 \qquad ; B = e^{\alpha}, \alpha > 0 \qquad (2)$$

من (2) ، (1) نجد أنهما متكافئان.

٣)- $C^m[a,b]$ هي مجموعة كل التوابع التي تملك مشتقات موجودة ومستمرة من المرتبة m . والنظيم في هذا الفضاء يعطى بالصيغة الآتية: $\|f\|_{C^m} = \|f\|_C + \|f'\|_C + \|f''\|_C + ... + \left\|f^{(m)}\right\|_C$

حيث: $\|f\|_C = \max_{x \in I}|f(x)|$

- في الفضاء ℓ_p ، $1 \le p < \infty$ ، $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ for $x = (x_k) \in \ell_p$

- حساب النظيم في $BV[0,1]$ حيث :

$$\|g\|_{BV} = |g(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) = |\arctan(0)| + \overset{1}{\underset{0}{V}}(\arctan(x)) = 0 + \arctan 1 - \arctan 0$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

25

حسب التابع g تابع متزايد تماما على $[0,1]$.

جواب السؤال الثالث (٩+٦=١٥درجة)

أ) إن صيغة الجداء الداخلي في $L_2(\mathbb{R})$ تعطى بالعلاقة :

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t).y(t)\,dt \quad ; \; x(t), y(t) \in L_2(\mathbb{R})$$

بفرض أنّ h_1, h_2, h_3 هي عناصر الجملة المتعامدة والتي نريد الحصول عليها. إنّ :

$$\|x_1(t)\|^2 = \langle x_1, x_1\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 t^2\,dt = \frac{2}{5} \Rightarrow \|x_1(t)\| = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

وبالتالي فإنّ : $h_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|} = \sqrt{\dfrac{5}{2}}\,t^2$ لنضع الآن :

$$h_2' = x_2 - \langle x_2, h_1\rangle h_1 = t - \left(\int_{-1}^{1} t\left(\sqrt{\frac{5}{2}}t^2\right)dt\right) \times \sqrt{\frac{5}{2}}\,t^2 = t - 0 = t$$

$$\|h_2'\| = \sqrt{\langle h_2', h'\rangle_2} = \left(\int_{-1}^{1} t^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

وبالتالي فإنّ : $h_2 = \dfrac{h_2'}{\|h_2'\|} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,t$ لنضع الآن :

$$h_3' = x_2 - \langle x_3, h_2\rangle h_2 - \langle x_3, h_1\rangle h_1$$

$$= 1 - \overbrace{\left(\int_{-1}^{1} 1.\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right)dt\right)}^{0} \times \sqrt{\frac{3}{2}}\,t^2 - \overbrace{\left(\int_{-1}^{1} 1.\left(\sqrt{\frac{5}{2}}t.dt\right)\right)}^{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}} \times \sqrt{\frac{5}{2}}t^2 = 1 - \frac{5}{3}t^2$$

$$\|h_3'\| = \sqrt{\langle h_3', h_3'\rangle} = \left(\int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{5}{3}t^2\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{-1}^{1} \left(1 + \frac{25}{9}t^4 - \frac{10}{3}t^2\right)dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

وبالتالي فإنّ : $h_3 = \dfrac{h_3'}{\|h_3'\|} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\left(1 - \dfrac{5}{3}t^2\right)$

وبذلك نكون قد حصلنا على الجملة الآتية : $h_3 = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\left(1 - \dfrac{5}{3}t^2\right)$ ، $h_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,t$ ، $h_1 = \sqrt{\dfrac{5}{2}}\,t^2$

نلاحظ أن :

$$\|h_1\|=\left(\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}t^4dt\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1\ \&\|h_2\|=\left(\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}t^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1\ \&\|h_2\|=\left(\frac{9}{8}\int_{-1}^{1}(1-\frac{5}{3}t^2)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$$

$$\langle h_1,h_2\rangle=\frac{\sqrt{15}}{2}\int_{-1}^{1}t^3dt=0\ \&\ \langle h_1,h_3\rangle=\frac{3\sqrt{5}}{4}\int_{-1}^{1}t^2\left(1-\frac{5}{3}t^2\right)dt=0\ \&\langle h_2,h_3\rangle=\frac{3\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{1}t\left(1-\frac{5}{3}t^2\right)dt=0$$

وبالتالي فإنّ الجملة التي أوجدناها متعامدة نظاميّة وتامّة بحسب طريقة شميث .

(1)

لدينا : $h_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}\ \Rightarrow\ x_1=\|x_1\|.h_1\ \Rightarrow\ x_1=\sqrt{\frac{2}{5}}.h_1$

(1)

كما أن : $h_2=\frac{h_2'}{\|h_2'\|}=\frac{x_2-\langle x_2,h_1\rangle h_1}{\|h_2'\|}\Rightarrow x_2=\langle x_2,h_1\rangle h_1+\|h_2'\|.h_2\ \Rightarrow x_2=0.h_1+\sqrt{\frac{2}{3}}h_2$

وأيضاً :

(1)

$$h_3=\frac{h_3'}{\|h_3'\|}=\frac{x_3-\langle x_3,h\rangle_2 h_2-\langle x_3,h_1\rangle h_1}{\|h_3'\|}\Rightarrow x_3=\langle x_3,h_1\rangle h_1+\langle x_3,h_2\rangle h_2+\|h_3'\|.h_3\quad\Rightarrow$$

$$x_3=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}.h_1+0.h_2+\frac{2\sqrt{2}}{3}h_3$$

ب)- بالفرض $A\subset X$ و $B\subset A$ ولنبين أن $A^{\perp}\subset B^{\perp}$. (3)

بفرض أن $x\in A^{\perp}$ ومن أجل اي $a\in B$ فإن (3) $\langle x\ ,\ a\rangle=0$ (لأن $B\subset A$) هذا يعني $x\in B^{\perp}$ يتم المطلوب.

<u>جواب السؤال الرابع (١٥ درجة):</u>

ليكن المؤثر

$$D:C[0,1]\to C[0,1]$$
$$f(x)\mapsto Df=f'$$

حيث هنا $f'=f'(x)$ مشتق التابع المستمر $f(x)$ حيث ساحة تعريف D تمثل مجموعة التوابع المستمرة والقابلة للاشتقاق على المجال $[0,1]$.

(5) إنّ **<u>D خطي</u>** :

$$D(\alpha f_1+\beta f_2)=(\alpha f_1+\beta f_2)'=(\alpha f_1)'+(\beta f_2)'=$$
$$\alpha(f_1)'+\beta(f_2)'=\alpha D(f_1)+\beta D(f_2)$$

(5) ولكنه <u>غير مستمر</u> (أي غير محدود) . فمثلاً لو أخذنا المتتالية $\{f_n(x)\}$ من التوابع المستمرة على المجال $[0,1]$ حيث : $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}\ ;\ n=1,2,....$ و $x\in[0,1]$ لوجدنا أن $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

ولكن المتتالية $\{Df_n(x)\}$ حيث: $Df_n(x)=\cos nx\ ;\ n=1,2,....$ متتالية غير متقاربة.

مغلق: لنأخذ المتتالية $\{x_n\} \subseteq D(D)$ بحيث تكون المتتالية $\{x_n\}$ والمتتالية $\{Dx_n\}$ متقاربتين أي ليكن:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \& \quad y = \lim_{n\to\infty} Dx_n = \lim_{n\to\infty} x'_n(t)$$

وبما أن التقارب بالنظيم في $C[0,1]$ هو تقارب منتظم على المجال $[0,1]$ عندئذٍ يكون:

$$\int_0^t y(\tau)d\tau = \int_0^t \lim_{n\to\infty} x'_n(\tau)d\tau = \lim_{n\to\infty}\int_0^t x'_n(\tau)d\tau = x(t)-x(0)$$

اي أن: $x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau$ وهذا يعني أن $x(t) \in D(D)$ وأن $x'(t) = y$ وبالتالي نستنتج أن D مغلق.

<u>جواب السؤال الخامس (١٠+١٠=٢٠ درجة):</u>

ليكن E فضاء خطياً منظماً عندئذٍ يكون الفضاء المرافق له E^* فضاء خطياً منتظماً وتاماً. لتكن $\{f_n\}$ متتالية أساسية في E^*. هذا يعني أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون:

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad \text{for} \quad n,m > n_0(\varepsilon)$$

وبالتالي من أجل أي $x \in E$ يكون:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|\|x\| < \varepsilon \|x\|_E$$

وبذلك تكون $\{f_n(x)\}$ متتالية أساسية من أجل كل $x \in E$ وبالتالي متقاربة. لنضع: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \;;\; x \in E$

ولنتأكد أن f دالي خطي ومستمر على E. من أجل أي عنصرين x,y من E ومن أجل أي عددين λ,μ لدينا:

$f(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty}[\lambda f_n(x) + \mu f_n(y)] = \lambda f(x) + \mu f(y)$ إذن f دالي خطي.

من المتراجحة (1) نجد عندما $n \longrightarrow \infty$ أن: $\quad (2) \quad |f(x) - f_m(x)| \le \varepsilon \|x\|_E \;;\; x \in E$

وهذا يعني أن الدالي $(f - f_m)$ محدود وبالتالي مستمر على E. وبما أن: $f = f_m + (f - f_m)$

فنجد أن f مستمر أيضاً. ويكون لدينا من (2): $\|f - f_n\| \le \varepsilon \quad \text{for} \quad n \ge n_0(\varepsilon)$

أي أن المتتالية $\{f_n\}$ متقاربة في E^* من الدالي f، إذن E^* تام وهو المطلوب.

ب)- نقول عن متتالية المؤثرات $\{A_n\}$ في فضاء هيلبرت H أنها تتقارب بضعف من المؤثر A إذا كان لدينا:

$(A_n f, g) \xrightarrow[n\to\infty]{} (Af, g) \;;\; \forall g \in H$ من هنا ينتج أنه إذا كانت $\{A_n\}$ متتالية من المؤثرات تتقارب بضعف

من A عندئذٍ المتتالية $\{A_n^*\}$ تتقارب بضعف من A^* عندما $n \longrightarrow \infty$، لأنه يكون $(f, A_n^* g) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f, A^* g)$.

أما إذا كان $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ (تقارب نقطي) فهذا لا يؤدي بالضرورة إلى أن $A_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} A^*$ (تقارب نقطي).

في الحقيقة لنأخذ على الفضاء ℓ_2 المؤثرات: $A_n(x_1, x_2, \dots) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) \;;\; x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$

عندئذٍ لدينا: $A_n^*(x_1, x_2, \dots) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, x_1, x_2, \dots)$

بهذا يكون $A_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ وذلك من أجل أي $x \in \ell_2$. ويكون: $\|A_n^* x\| = \|x\|$.

حمص في ٢١ / ٨ / ٢٠١٦ م. انتهت الإجابات مدرسا المقرر

د. سامح العرجة ، د. محمد عامر